1、P17 第1题 —— 子列的子列

2、P80 第6题 —— 闭区间套．☆ 说明白

3、设 $A_n \subset [0,1]$ 为有限数集 $(n\in\mathbb{N})$ $n\neq m$ 时，$A_n \cap A_m = \phi$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x\in A_n \\ 0, & [0,1]\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \end{cases}$$

11.9课

1、$f'(x_0)$ 存在，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x+\Delta x^2)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$\frac{f(x_0+\Delta x+\Delta x^2)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x+\Delta x^2)-f(x_0)}{\Delta x+\Delta x^2}\cdot\frac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

2、$f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x+\cos x)\times(2\sin x\cos x-\sin x)}{e^x\tan x+(e^x-1)\frac{1}{\cos^2 x}}$$
$$= f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos^3 x-\sin x\cos^2 x}{(e^x-1)+e^x\sin x\cos x} = \frac{1}{2}f'(1)$$

3、$f(x)$ 在 $x=2$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$，求 $f'(2)$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$ ，$f(x)=3(x-2)+o(x-2)$，$x\to 2$ $\Rightarrow f(2)=0$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=3$$

4、$f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$ $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，$\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 1 处可导 的 ($\Rightarrow$)

$$f(x)=\begin{cases}(x^3-1)\varphi(x), & x>1\\ 0, & x=1\\ (1-x^3)\varphi(x), & x<1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+}(x^2+x+1)\varphi(x)=\lim_{x\to 1^-}-(1+x+x^2)\varphi(x)$$
$$3\varphi(1)=-3\varphi(1)$$
$$\varphi(1)=0$$

5、$f(x)$ $\mathbb{R}$ 上无零点，$\forall x,y\in\mathbb{R}$，$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ $f'(0)=1$． $f'(x)=f(x)$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)(f(\Delta x)-1)}{\Delta x}$$

6、$y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$ $y'(1)=\frac{e-1}{e^2+1}$

7、$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ -x^2, & x>0\end{cases}$ $(g(f(x)))'$

8、$x=g(y)$ 是 $f(x)=\ln x+a\tan x$ 的反，求 $g'(\frac{\pi}{4})$ $=\frac{2}{3}$

$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ ，$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}$ ，$f'(1)=\frac{3}{2}$

9、$y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$ y''?

$y=\frac{1}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

10、$r=\theta$

$$\begin{cases}x=\theta\cos\theta\\ y=\theta\sin\theta\end{cases}\quad \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}\quad (x,y)=(0,\tfrac{\pi}{2})\quad y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$$

11、$\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{t\cos t}{\cos t}=t$ $\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{dx/dt}=\frac{1}{\cos t}$ $\sqrt{2}$

12、$g(x)=\ln(1+x)$

$$\frac{f(b)-f(0)}{g(b)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

13、$f(x)=\operatorname{sgn} x$

导数介值性 —— Darboux 定理 ☆ significant —— P119

14、$\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$

15、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\frac{1}{x}[\ln(e^x+\cdots+e^{nx})-\ln n]\Rightarrow\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+\cdots+e^{nx}}\Rightarrow\frac{n+1}{2}$$

16、$f(x)=\begin{cases}\frac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ $\varphi(x)$ 有二阶连续导函数．$\varphi(0)=1$

(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi'(0)x+o(x)}{x}=\varphi'(0)=a$

(2) $f'(x)=\begin{cases}\frac{(\varphi'(x)+\sin x)x-\varphi(x)+\cos x}{x^2}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}(\varphi''(0)+1), & x=0\end{cases}$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\varphi(x)-\cos x-\varphi'(x)\cdot x}{x^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\varphi''(x)\cdot x^2+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\varphi'(x)+\sin x)x-\varphi(x)+\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+\varphi'(x)\cdot x-\varphi(x)+\cos x+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varphi''(0)$

1、$f(x)$ 在 (a,b) 可微 $\wedge$ 无界 $\Rightarrow$ $f'(x)$ 在 (a,b) 内无界．（其逆不真）

正向：反证 + 中值定理

反向：$f(x)=\sqrt{x}$

17、$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=$

$$\frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})=\frac{-\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=$

$\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2-1}$ $\Rightarrow e^2$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin^2\frac{k\pi}{n}$$

$$\frac{k\pi}{n}-\frac{1}{6}\left(\frac{k\pi}{n}\right)^3<\sin\frac{k\pi}{n}<\frac{k\pi}{n}$$

$$\sum_{k}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k^2\pi^2}{n^2}=\sum_{k}^{n-1}\frac{k^2\pi^2}{n^2}+\sum_{k}^{n-1}\frac{k^3\pi^2}{n^3}$$

1、$\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x^2}\Rightarrow\frac{1+\frac{1}{2}x\sin x-\cos x}{x^2}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}x\sin x+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

2、$\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}\Rightarrow\frac{\sin x\sqrt{\cos 2x}+\frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}\sin 2x\times 2\cdot\cos x}{2x}=\frac{3}{2}$

$2-2\times\frac{1}{3}$

3、$\frac{(1+x^2)(1-\cos 2x)-2x^2}{x^4}=\frac{2(1+x^2)\sin^2 x-2x^2}{x^4}=\frac{2\sin^2 x-2x^2+2x^2\sin^2 x}{x^4}\Rightarrow 2+2\cdot\frac{(\sin x+x)\times(-\frac{1}{6}x^3)}{x^4}\Rightarrow\frac{4}{3}$

4、$\frac{\sin(\sin x)-x}{x^3}\Rightarrow\frac{\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x-x}{x^3}\Rightarrow\frac{-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}\sin x^3}{x^3}\Rightarrow-\frac{2}{3}$

5、$\left(\frac{2}{x^2}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ $(x\to\infty)$

$$x^2\ln\left(\frac{2}{x^2}+\cos\frac{1}{x}\right)\Rightarrow\frac{\ln(\cos t+2t^2)}{t^2}\Rightarrow\frac{\ln(1-\frac{1}{2}t^2+2t^2)}{t^2}=\frac{3}{2}$$

6、已知 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{3^x-1}=5$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=?$

$$\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{3^x-1}=\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{\frac{f(x)}{\sin x}}\cdot\frac{\frac{f(x)}{\sin x}}{3^x-1}$$
$=5$

$$\frac{\frac{f(x)}{\sin x}}{3^x-1}=\frac{f(x)}{\ln 3\cdot x\cdot\sin x}\Rightarrow$$ 所求 $=5\ln 3$

7、设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，$\{\alpha_n\}\{\beta_n\}$ 为趋于 0 的正数列，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$

$$\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}\quad\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n}+\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\left(\frac{f(x_0-\beta_n)-f(x_0)}{-\beta_n}-\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n}\right)$$

有界

8、$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$

9、$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right) \quad a\neq 0$

$\ln(1+ax)=ax-\frac{1}{2}(ax)^2+o(x^2)$

$\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\left(ax-\frac{1}{2}(ax)^2+o(x^2)\right) \Rightarrow \frac{1}{2}a^2$

10、 $u=u(x)$ 是 $f(x)$ 切线与 x 轴截距，$f(x)$ 二阶导连续，$f'(0)=f(0)=0$，$f''(0)>0$

$y=f'(x)(x-x)+f(x) \qquad u(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

$\frac{x}{x-\frac{f(x)}{f'(x)}}=\frac{xf'(x)}{xf'(x)-f(x)} \Rightarrow \frac{f'(x)+xf''(x)}{xf''(x)}=1+\frac{f'(x)}{xf''(x)}=2$

11、$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{e^{x^2}-1}=\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}=-\frac{1}{8}$

12、设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有 有界导函数，应用 Lagrange 中值定理证明 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\ln x}=0$

$\frac{f(x)}{\ln x+1}$

$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$ / $x\ln x$

（$f'(\xi)$：有界）

1、$\int\frac{x^2+1}{x^3+4x^2+5x+2}dx$

$=\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x+2)}dx \qquad \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+2)}$

$A(x+1)(x+2)+B(x+2)+C(x+1)^2=x^2+1$

$A+C=1$

$2A+2B+C=1 \qquad A+2B=0 \qquad B=2 \quad A=-4 \quad C=5$

$3A+B+2C=0 \qquad A+B=-2$

2、$\int\left(1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}\right)dx$

$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$

$A(x^2-5x+6)+B(x^2-3x)+C(x^2-2x)=5x^2-6x+1$

3、$\int\frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{t^3+t^2-4t-2}{t^2(t+1)^2}$