定积分的定义 —— 分划π，介点集$\{\xi_i\}$，Riemann和 与 Riemann可积 ε-δ语言

分划π：$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，介点集$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$

Riemann和 $\sigma(f,\pi,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，$\|\pi\|=\max\{\Delta x_i\}$

$\lim\limits_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在 且 π与$\{\xi_i\}$对其无影响 $\Rightarrow$ 可积

or we can say：

$\exists I\in\mathbb{R}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$\|\pi\|<\delta$时，$\forall\pi$与ξ，$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx=I$

7.2 可积的条件

Thm1. 可积函数 $\Rightarrow$ 有界

反证，若无界，则分划里总有一个区间无界。$\Rightarrow$ 构造一个介点，使Riemann和无极限.

Darboux 大(上)和与 Darboux小(下)和 $\overline{S}(f,\pi)$ & $\underline{S}(f,\pi)$

$M_i=\sup f([x_{i-1},x_i])$，$m_i=\inf f([x_{i-1},x_i])$

$\overline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$ $\quad\underline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$

Lemma 1：π加细为π^*，则 $\underline{S}(f,\pi)\le\underline{S}(f,\pi^*)\le\overline{S}(f,\pi^*)\le\overline{S}(f,\pi)$

$\underbrace{[x_{i-1},x_i]}_{M_i}\to\underbrace{[x_{i-1},x']}_{M_i^{(1)}},\underbrace{[x',x_i]}_{M_i^{(2)}}$ $\quad M_i^{(1)},M_i^{(2)}\le M_i$

Lemma 2：$\forall\pi_1,\pi_2$，$\underline{S}(f,\pi_1)\le\overline{S}(f,\pi_2)$ Obviously

$\underline{\int_a^b}f(x)dx=\sup\limits_{\pi}\underline{S}(f,\pi)$，$\overline{\int_a^b}f(x)dx=\inf\limits_{\pi}\overline{S}(f,\pi)$ 单调+有界

Thm2. $[a,b]$上有界函数f，f可积 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists$分划π：$\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon$

Significant!

$\underset{\text{(Obviously)}}{\Leftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists$分划π：$\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

(其中$w_i=\sup f([x_{i-1},x_i])-\inf f([x_{i-1},x_i])$，振幅)

① "$\Rightarrow$" $f\in R[a,b]$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists$分划π：$\left|\overline{S}(f,\pi)-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\left|\underline{S}(f,\pi)-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\to\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\left|\overline{S}(f,\pi)-I\right|+\left|\underline{S}(f,\pi)-I\right|<\varepsilon$

② "$\Leftarrow$" $\forall\varepsilon>0$，$\exists$分划π'：$\overline{S}(f,\pi')-\underline{S}(f,\pi')<\frac{\varepsilon}{2}$，亦即 $\sum_{\pi}w_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$

即有 $\overline{\int_a^b}f(x)dx=\underline{\int_a^b}f(x)dx$，设其为$I$

开区间

取 $\delta=\min\{x_1'-x_0',x_2'-x_1',\cdots,x_p'-x_{p-1}',\frac{\varepsilon}{2(M-m+1)p}\}$ 其中$M=\sup f([a,b])$，$m=\inf f([a,b])$

于是，当$\|\pi\|<\delta$时，令$\Lambda=\{i\mid\exists k,x_k'\in(x_{i-1},x_i)\}$ 有限项 想有多少项就有多少项

$\left|\sum_{\pi}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i-I\right|<\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)=\underbrace{\sum_{i\in\Lambda}w_i\cdot\Delta x_i}_{\le(M-m)(p-1)\delta}+\underbrace{\sum_{i\notin\Lambda}w_i\cdot\Delta x_i}_{<\sum_{\pi}w_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

因为 $\underline{S}(f,\pi)<\begin{cases}\sum_{\pi}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\\ I\end{cases}<\overline{S}(f,\pi)$

Thm3. $[a,b]$上有界函数f，f可积 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\forall\sigma>0$，$\exists\pi$，$\sum_{i\in\Lambda}\Delta x_i<\varepsilon$ where $\Lambda=\{i\mid w_i\ge\sigma\}$

① $f\in R[a,b]\to\sum_{i\in\Lambda}\Delta x_i<\frac{1}{\sigma}\sum_{i\in\Lambda}w_i\Delta x_i<\frac{1}{\sigma}\sum_{\pi}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

② $\forall\varepsilon>0$，取$\sigma=\frac{\varepsilon}{(b-a)2}$，$\exists\pi$，$\sum_{i\in\Lambda}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{M}$ where $\Lambda=\{i\mid w_i\ge\sigma\}$，$M=\sup f[a,b]$

$\sum w_i\Delta x_i<\sigma\sum_{i\notin\Lambda}x_i+\sum_{i\in\Lambda}w_i\Delta x_i<\sigma(b-a)+M\sum_{i\in\Lambda}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$

常见可积函数类

1、闭区间连续函数

$\Rightarrow$ 一致连续 $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$|x-y|<\delta$时，$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$。

当$\|\pi\|<\delta$时，$\sum w_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon$

2、有限个间断点的有界函数

设间断点为$x_1,\cdots,x_k$。取$\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{2k},\frac{1}{3}\min\{x_i-x_{i-1}\}\}$，并利用Thm 3.

3、闭区间单调

取$\|\pi\|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$，$w_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$，$\sum w_i=f(b)-f(a)$ (单减同理)

7.3 properties

Thm1. $\int_a^b(cf+dg)(x)\,dx=c\int_a^b f(x)dx+d\int_a^b g(x)dx$

Thm2. $f,g\in R[a,b]$，则$f\cdot g\in R[a,b]$

我们只需证$f\in R[a,b]\longrightarrow f\cdot f\in R[a,b]$

$\left|f^2(x)-f^2(y)\right|=\left|f(x)+f(y)\right|\left|f(x)-f(y)\right|\le2M\cdot w(f)$

Thm3. Duhamel Theorem：若$f,g\in R[a,b]$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i)\cdot g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$

推广：若$f,g\in R[a,b]$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=0}^{n}u_iv_i\Delta x_i=\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$ (其中$u_i\in[m_i(f),M_i(f)]$，$v_i\in[m_i(g),M_i(g)]$)

$\left|\sum_{i=0}^{n}u_iv_i\Delta x_i-\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right|<\left|\sum_{i=0}^{n}u_iv_i\Delta x_i-\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i)\cdot g(\xi_i)\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i)\cdot g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right|$

$<\left|\sum_{i=0}^{n}u_iv_i\Delta x_i-\sum_{i=0}^{n}u_i\cdot g(\xi_i)\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=0}^{n}u_i\cdot g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i)\cdot g(\xi_i)\Delta x_i\right|+\frac{\varepsilon}{3}$

$<M_f\sum w_i(f)\Delta x_i+M_g\sum w_i(g)\Delta x_i+\frac{\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}$

Thm4. (1) $f\in R[a,b]\Rightarrow\forall[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，$f\in R[\alpha,\beta]$

(2) $f\in R[a,b]\wedge f\in R[b,c]\Rightarrow f\in[a,c]\wedge\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$ Obviously.

Thm5. $f\in R[a,b]\wedge\forall x\in[a,b]:f(x)\ge0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\ge0$

Inference：$f,g\in R[a,b]\wedge\forall x\in[a,b]:f(x)\ge g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$

注2 on P210 ★

$f\in R[a,b]\wedge\forall x\in[a,b]:f(x)>0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx>0$ Unbelievable.

Thm.6 f为$[a,b]$上非负连续函数，$\int_a^b f(x)dx=0\to f(x)\equiv0$

proof by contradiction. + 保号性

Cauchy-Schwarz inequality：

$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$

$\int_a^b f^2(x)dx\cdot t^2-2\int_a^b f(x)g(x)dx\cdot t+\int_a^b g^2(x)dx\ge0$

Thm7. $f\in R[a,b]\longrightarrow|f|\in R[a,b]$ $\quad w(|f|)<w(f)$

Thm8. Integral Mean Value Theorem

$f,g\in R[a,b]\wedge g(x)$在$[a,b]$上不变号 $\Rightarrow\exists\mu\in[m,M]$，$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$

其中 m,M 为$f(x)$在$[a,b]$上的上确界与下确界.

$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$ ($g(x)>0$时)

Thm9. $f(x)\in R[a,b]$，令$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$ 变上限积分函数

(1) F在$[a,b]$上满足Lipschitz条件

(2) f在点$x_0\in[a,b]$连续，则F在x_0点可导 $\wedge$ $F'(x_0)=f(x_0)$

(1) $|F(x)-F(y)|=\left|\int_y^x f(t)dt\right|<L|x-y|$

取分划π：x,y即可

✓ $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=0$ in mobile

✓ $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right)^{\frac{1}{n}}=1$

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=a$

(i) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，求证 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=a$ (*)

(ii) 设 $f(t)$ 在任何区间 $[0,x]$ 上都可积，则(*)成立

---

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}\right)$

$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n})}$

取 $\ln$：$\frac{1}{n}\sum\ln(1+\frac{i}{n})$ 所求 $=\exp\left(\int_0^1\ln(1+x)dx\right)$

$\int_0^1\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\ln2-\int_0^1(1-\frac{1}{x+1})dx=\ln2-1+\ln2=2\ln2-1$

所求 $=\frac{4}{e}$

2. $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}xe^{-x}dx$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_n}{e^{\xi_n}}=\lim_{\xi_n\to+\infty}\frac{\xi_n}{e^{\xi_n}}=0$

3、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f(x)>0$，$f''(x)>0$

证：$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}=(b-a)f(1)$

易证因 $f(x)\geq f(a)$

$f''(x)>0\Rightarrow f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)>f(x)$

$\Rightarrow\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sin x & 0\leq x\leq\pi\\ 1+\cos x & x>\pi\end{cases}$，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 求 $\Phi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 内表达式

连续，变相求积分，Easy.

5. $f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt$，$x>0$，求 $f(x)+f(x^{-1})$

令 $F(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$

$F'(x)=\frac{\ln x}{x}$

$F(x)=\int\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\ln^2x+C$，$C=0$

6. f 连续

(1) $\int_0^x(x-t)f(t)dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt$

(2) $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$

(3) $\frac{d}{dx}\left(x\int_{x^2}^{x^3}f(t)dt\right)$ (易)

(1) $\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

记 $F(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt-\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt$

$=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dx-\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt$

$\Rightarrow F'(x)=\cdots=0$ 且 $F(0)=0$

(2) $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$

Let $u=x^2-t^2$，$du=-2t\,dt$

$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du$

7. $\alpha(x)=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt$，$\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$，求 $\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ L'Hospital

8、记 $F(x)=\int_a^b|t-x|f(t)dt$，$x\in[a,b]$ 求 $F''(x)$. $(2f(x))$

1、$f(x)$ 具有连续导数，$\varphi(x)=\int_0^1 f(tx)dt$ 且 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$，求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性

$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du & ,x\neq0\\ f(0)=0 & ,x=0\end{cases}$

$\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du+\frac{1}{x}\cdot f(x)$，$x\neq0$

$\varphi'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du-xf(0)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$

$\lim_{x\to0}\varphi'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\frac{A}{2}$ 连续！

2、Function $3x-1-\int_0^x\frac{dt}{1+t^4}=0$ 在区间 $(0,1)$ 有唯一实根

$f(0)=-1$，$f(1)=2-\int_0^1\frac{dt}{1+t^4}>0$

$f'(x)=3-\frac{1}{1+x^4}>0$

3、$f(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)\neq0$，求 $\lim_{x\to0}\frac{\int_{x^2}^{0}f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}$

$\lim_{x\to0}\frac{\int_{x^2}^{0}f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}=\lim_{x\to0}\frac{-2x\cdot f(x^2)}{2x\cdot\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)}$

广义积分

无穷积分收敛性判别法（充要）

① Cauchy 收敛准则

$\forall \varepsilon>0, \exists A>a, \forall A', A''>A: \left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right|<\varepsilon$

否定：$\exists \varepsilon>0, \forall A>a, \exists A' A''>A: \left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| \geq \varepsilon$

② Heine 归并定理

$\forall$ 单增数列 A_n，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{A_n} f(x)dx$ 存在.

证否：找 A_n' 与 A_n''，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{A_n'} f(x)dx \neq \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{A_n''} f(x)dx$

非负函数无穷积分收敛性判别法

① $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 有上界（利用 ↗）单调有界易证

② $0 \leq f(x) \leq g(x)$ when x 充分大

$\int_a^{+\infty} g\,dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f\,dx$ 收敛

$\int_a^{+\infty} f\,dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g\,dx$ 发散

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调，$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{h\to 0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(nh)\cdot h = \underbrace{\int_0^{+\infty} f(x)dx}_{\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{A_n} f(x)dx}$.

（手机 12.9 11:00 照片）

1、$\varphi(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{\varepsilon\varphi(x)}{\varepsilon^2+x^2}dx=\pi\varphi(0)$

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)\cdot\underbrace{\left(\arctan\frac{x}{\varepsilon}\right)'}_{\text{单增有界}}dx$$

$=\varphi(\xi_n)$.

2、

3、

12.11

1. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$

$=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$ 令 $x=\frac{1}{t}$，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt$

(上式广义积分收敛)

2. $\int_0^1\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$

$\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin x+\ln\cos x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\frac{1}{2}\sin 2x)d(2x)$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin t\,dt-\frac{\pi}{2}\ln 2$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx-\frac{\pi}{2}\ln 2$

所求 $=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

4. 讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 只需考虑 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$

① $q>p+1$ 时 ——

5、Cauchy 主值 $\frac{1}{x}$，$\cos x$ ✓

$\int_1^{+\infty}(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1})dx$，$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}$ 分段说明

$\frac{x^2+x-px^2-p^2}{(x^2+p)(x+1)}$

8、判断.

1) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 $\begin{cases}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=f(x)\\ \frac{d}{dx}\int_{x}^{+\infty}f(t)dt=-f(x)\end{cases}$ ✓

(2) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在，则 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 发散 ✗ $f(x)=\sin(x^2)$

(3) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上无界，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散 $f(x)=\begin{cases}n, & x\in[n-\frac{1}{n2^n},n]\\ 0, & x\in(n-1,n-\frac{1}{n2^n})\end{cases}$ ✗

(4) 若 $f(x)\geq 0$，连续，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ $f(x)=\begin{cases}n, & x\in[n-\frac{1}{n2^n},n]\\ 0, & x\in(n-1,n-\frac{1}{n2^n})\end{cases}$ 中的"$\sqcap$"变为"$\wedge$" ✗

(5) 若 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，$A=0$ ✓

(6) 若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛 ✗ $f(x)=\begin{cases}0 & x\in[n-1,n-\frac{1}{4^n})\\ (-2)^n & x\in[n-\frac{1}{4^n},n)\end{cases}$

(7) 若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$，则 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛 ✓

(8) 若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，$\lim_{x\to+\infty}g(x)=1$，$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛 $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ $g(x)=1+f(x)$

$\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ $(p>0)$ 的敛散性 ☆ 记结论 $\sin x^2$ 与 $\cos x^2$ 条件收敛

12.23

1. $f\in C[a,b]$，$\exists\xi\in(a,b)$，$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

case 1: $\int_a^b f(x)dx=f(a)\int_a^b dx\Rightarrow\int_a^b(f(x)-f(a))dx=0$

欲证 $\exists\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=f(a)$

2. $f\in C[a,b]$，且 $\int_a^b f(x)dx=0$ 求证 $\exists\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=0$

反证即可 有 $f(x)>0$ 或 <0 $(x\in(a,b))$，于是有 $\int_a^b f(x)dx\neq 0$

可证

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b f(x)dx>0$，求证 $\exists$ 区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，$f(x)>0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$

反证：可积 —— 作分划、取介点、 介点总取负的点 ✓

4. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，$f(1)-f(0)=1$，则 $\int_0^1(f'(x))^2dx\geq 1$

$\int_0^1 f'(x)dx=1$ + Cauchy

Teacher: $\int_0^1(f'(x)-1)dx\geq 0$

5. $\int_0^1 f(x)\,dx=1,\int_0^1 xf(x)\,dx=\alpha,\int_0^1 x^2f(x)\,dx=\alpha^2$ 且 $f>0$，能否存在？

$\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2=\int_0^1 x^2f(x)\,dx\cdot\int_0^1 f(x)\,dx$ (回去尝试)

Teacher: $\int_0^1 f(x)(\alpha-x)^2dx=0$ >0 矛盾！

6、$f(x)$ 连续，任一 $\int_a^b\varphi(x)dx=0$，有 $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0$，则 $f(x)\equiv C$

记 $C=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，令 $\varphi_0(x)=f(x)-C$，则 $\varphi_0(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\int_a^b\varphi_0(x)dx=0$

$\int_a^b(f(x)-C)\cdot\varphi_0(x)dx=\int_a^b\varphi_0^2(x)dx=0\Rightarrow\varphi_0(x)\equiv 0$

7、$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有连续导数，$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$

求证：$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=A$

不妨设 $nx=u$

$\int_0^1 f(nx)dx=\int_0^n f(u)d\frac{u}{n}=\frac{\int_0^n f(u)du}{n}$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(u)du}{x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$

1、$f(x)\in C[a,b]$，$\int_a^b f(x)dx=0$ 且 $\int_a^b xf(x)dx=0$：至少 $\exists$ 2 点，$x_1,x_2\in(a,b)$，$f(x_1)=f(x_2)=0$

$f(\xi_1)=0$ $\xi_2 f(\xi_2)=0$ ① 若 $\xi_1=0$，$xf(x)$ 恒正 or 恒负

② 若 $\xi_1>0$

$(x-c)f(x)$

2、$f(x)$ 在每个有限区间上可积，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=B$

求 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+a)-f(x)\,dx$

$\int_\alpha^\beta(f(x+a)-f(x))dx=\int_\beta^{\beta+a}f(x)dx-\int_\alpha^{\alpha+a}f(x)dx=(A-B)a+\int_\beta^{\beta+a}(f(x)-A)dx-\int_\alpha^{\alpha+a}(f(x)-B)dx=(A-B)a$

3、$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ 的值与 α 无关

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$，令 $t=\frac{1}{x}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

4、$f(x)\in D[a,+\infty)$，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$，$\int_a^{+\infty}f'(x)dx$ 均收敛，求证 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

$f(x)=\int_a^x f'(t)dt+f(a)$，$\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(a)+\int_a^{+\infty}f'(x)dx$ 存在.

不妨设 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A>0$，则 $\exists X_0>0$ $\forall x>X_0$，$f(x)>\frac{A}{2}$

$\Rightarrow\int_{X_0}^{+\infty}f(x)dx\longrightarrow+\infty$ 矛盾

5、$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}$ 的敛散性

$x>100$ 时，有 $\frac{\sqrt{x}}{x+100}\downarrow$ 且 $\longrightarrow 0$ 条件

6、设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上二阶连续可导，若 $\forall x\in[1,+\infty)$，$f(x)>0$ 且 $\lim_{x\to+\infty}f''(x)=+\infty$，则 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}dx$ 收敛

$\frac{f(x)}{x^2}\longrightarrow\frac{f''(x)}{2}\longrightarrow+\infty$

7、 $h \le f \le g$

if $\int_a^{+\infty} h$ $\int^{+\infty} g$ 收，则 $\int^{+\infty} f$

if $\int_a^{+\infty} h = \int^{+\infty} g = A$，则 $\int^{+\infty} f = A$