1、 $\frac{2+(-1)^n}{4^n}$ ✓ $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ✗ $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ ✗

2、 $\sum \underbrace{(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{收敛}} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\uparrow\text{有界}} \underbrace{(3-\arctan n)}_{\downarrow\text{有界}}$

条件收敛

3、 $\sum \frac{\sin nx}{n^p}$ $0<x<\pi$, $p>0$

① $p>1$时，绝对

② $p\leq 1$时，$\frac{1}{n^p}\downarrow$且$\to 0$ $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\right| < \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$

$|\underline{s}$

4、 $\sum \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$, $x>0$

$\boxed{12.21}$

1、若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 发散

$b_n\neq 0$时，$\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$

easy and trivial

2、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有：$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$

① "$\Rightarrow$" 由Cauchy收敛可得（取$N=k+1$）

② "$\Leftarrow$" $|u_m+\cdots+u_{m+p}| \leq |u_N+\cdots+u_{m-1}| +\cdots+ |u_N+\cdots+u_{m+p}| \leq 2\varepsilon$

3、若级数 $\sum u_n$ 对 $\forall p\in\mathbb{N}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p})=0$， $\sum u_n$ 收敛

反例：$\frac{1}{n}$

4、 $\sum_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+\ldots+u_{n_{k+1}})$ 收敛且括号内不变号 $\Longrightarrow \sum u_n$ 收敛

5、 $a_n\geq 0$，$\{na_n\}$有界，证：$\sum a_n^2$收敛 $(na_n)^2\leq M^2 \Rightarrow a_n^2\leq\frac{M^2}{n^2}$

6、 $\sum a_n^2$收敛，则$\sum\frac{a_n}{n}$也收敛 $\left|\frac{a_n}{n}\right|\leq a_n^2+\frac{1}{n^2}$

7、正项级数 $\sum a_n$收敛，则 $\sum a_n^2$收敛 $|a_n|$有界 $\Rightarrow$ $a_n^2\leq Ma_n$

8、正项级数 $\sum a_n$收敛，则 $\sum\sqrt{a_na_{n+1}}$ 也收敛；反之不然

$\sqrt{u_nu_{n+1}}\leq\frac{u_n+u_{n+1}}{2}$

9、 $\sum 2^{-n-(-1)^n}$ 收敛

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{(-n)-(-1)^n}}$

10、 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$ 与 $\sum a_n$ 同敛散

取 $\ln(1+a_1)+\ln(1+a_2)+\cdots+\ln(1+a_n)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$

11、证$\{a_n\}$为单减的正数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$

(1) $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$ 单减 且$\to 0$

(2) $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}\downarrow$ 且$\to 0$ 夹逼

$\boxed{12.23}$

1、 $\sum a_n$与$\sum c_n$收敛，且有 $a_n\leq b_n\leq c_n$

(1) b_n收敛 $0\leq c_n-b_n\leq c_n-a_n$ + 比较判别法

(2) a_n、c_n发散，b_n发散？ 易证

2、 $\lim\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0$，证：

(1) 若$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛. —— $\lim\frac{|a_n|}{|b_n|}=k\neq 0$ $\Rightarrow$ $|a_n|$绝对收敛

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是否收敛？ ✗

$b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $a_n=\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$