荣誉课 阶段考：前三章 $10\% + 20\% + 30\% + 40\%$ 期中 期末

每周一次作业

理科大楼6号731 王楷植 周五 19:00－21:00 Mean field games 平均场博弈

一、集合与函数

一、集合及其运算

1、 M^+ 表示 M 去除0及负数的集合

点的 δ 邻域 $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 去心 δ 邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ ，左、右同理

2、一些集合

有限集 —— 与 $\{1,2,\cdots,n\}$ 一一对应

无限集 — 非有限集

单点集 — 只有一个元素

可列

$\underbrace{N=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}}_{\text{基数}}$ 若 $f: N \to A$ (双射) 则称A为可列数列

例：Q是可列的

法1：(来自荣誉)

$x=\frac{q}{p}$ ，$q\in Z$ ，$p\in N^+$

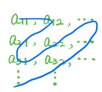
现取出满足 $p+|q|=n$ 的 x：

$$\left.\begin{aligned} &n=1: \tfrac{0}{1} \\ &n=2: \tfrac{-1}{1}, \tfrac{1}{1} \\ &\quad\vdots \\ &n=k: \pm\tfrac{k-1}{1}, \cdots \pm\tfrac{k-1}{1} \\ &\quad\vdots \end{aligned}\right\}$$

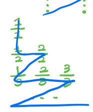
由上至下，由左至右取，得到 $\{x_n\}$

$\forall x\in Q$ ，$x\in\{x_n\}$

法2： 1° 可列集合的并集是可列集：



2° (0,1]中的Q是可列集：



去掉相同项即可

3、集合间的关系及运算

差集：$A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$

余集(or补集)：If $A\subset X$ ，则 $X\setminus A$ 称为A关于X的余集，记为：

$C_X A$ ，简记为 A^X

直积 $A\times B=\{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$ ，二元集合 R^2 记为平面上所有点，R^3 同理.

4.集族

$C=\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda, A_\lambda\subset X\}$ ，其中 Λ 为指标集

简记为 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ，称之为由指标集 Λ 所确定的X上的集族

$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\{a \mid \exists\lambda\in\Lambda, \text{s.t. } a\in A_\lambda\}$

$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\{a \mid \forall\lambda\in\Lambda, \text{s.t. } a\in A_\lambda\}$

若 $\Lambda=N$ ，则记 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\{A_n\}$ ，其并与交记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$

$\{A_n\}$ 称为集合序列

例：$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n},3-\frac{1}{n})=(0,3)$ ，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n},+\infty)=R^+$ ，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n})=[a,b]$

5.重要不等式

ABS不等式：$|a+b|<|a|+|b|$

伯努力不等式：$(1+x)^n>1+nx$

Cauchy不等式：$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k\right| \le \left|\sum\limits_{k=1}^{n}|a_kb_k|\right| \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (构造一元二次方程 + $\Delta\le 0$)

邻域

论及的问题与邻域半径无关则简记为 $U(a)$ ，$\mathring{U}(a)$

确界

1. $\exists M>0$ ，s.t. $\forall x\in A$ ，有 $x\le M$ ，M 称为上界 (同理下界)
2. A为有界集 $\Leftrightarrow \exists K>0$ ，s.t. $|x|\le K$. (上下有无界同理)
3. 定义：A为数集，$\exists\beta$ ，s.t.

   (1) $\forall x\in A$ ，$x\le\beta$

   (2) $\forall\varepsilon>0$ ，$\exists x\in A$ ：$x>\beta-\varepsilon$

   记为 上确界 $\sup A$ 。同理下确界 $\inf A$ 。

(另一种定义：上界构成集合X，X中最小值为 $\sup A$)

规定：$\sup\phi=+\infty$ ，$\inf\phi=-\infty$

荣誉中认为确界存在定理为公理

及R是连续的。Q稠密但不连续

数分普通认为了无限不循环小数存在的 Axiom

$x=[x]+\{x\}$ ，

构造集合 A_0 ，A_1 ，$A_2\cdots$

整数最大 第1位小数

有 $\beta=\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n\cdots$

① $\begin{cases} x_n\in A_n \text{，且 } x_n\notin A_{n+1} \\ \forall n, x_n\in A_n \end{cases}$ — 皆有 $x_n\le\beta$

② $\forall\varepsilon$ ，$\exists N$ ，$\frac{1}{10^N}<\varepsilon$ ，$m>N+100$ 时，$\beta-x_m<\frac{1}{10^N}<\varepsilon \Rightarrow \beta-\varepsilon<x_m$

综1.2，β 为上确界

二、映射与函数

$\forall x\in X$ ，$\exists$ 唯一的 $y\in Y$ 与之对应 —— 对应规则 f 。 记作 $f: X\to Y$ ，$x\mapsto y=f(x)$

X称为映射 f 的定义域，记为 D_f 。$f(X)=\{f(x) \mid x\in X\}$ 为值域 R_f ，注：$R_f\subset Y$

$$\left.\begin{aligned} &\text{若 } f(X)=Y \text{，则为满射} \\ &\text{若 } \forall x_1,x_2\in X,\ x_1\ne x_2 \text{，有 } f(x_1)\ne f(x_2) \text{ 单射} \end{aligned}\right\} \text{一一对应}$$

$f(x)=y_0$ ，常值映射。$f(x)=x$ ，恒等映射

$f: X\to Y$ 为双射：Define $f^{-1}: Y\mapsto X$ ，$y\mapsto x=f^{-1}(y)$ 为 f 的逆映射

对于 $f: X\to Y$

$f(A)=\{f(x) \mid x\in A\}$ 像

$f^{-1}(B)=\{x \mid f(x)\in B\}$ 原像 $B\subset Y$ (B不必为 R_f 子集)

泛函：$X(\ne\phi)\xrightarrow{f}Y$ (数集) 泛函

$X(\ne\phi)\xrightarrow{f}X$ 变换

X (数集、点集) $\xrightarrow{f}R$ 实函数

三、函数

设数集 $D\subset R$，则 $f: D\to R$ 记为 $y=f(x),\ x\in D$

函数图像 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$

(1) 有界：$\forall x\in D$（or $I\ (I\subset D)$），$\exists M>0$，$|f(x)|\le M$　则 $f(x)$ 为有界函数（or I 上有界）

(2) 单调可乎☆　　严格单调 $\Leftrightarrow [f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)$ 不变号

(3) 奇偶　$chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$shx$，$thx$

(3) 周期

(4) 反函数：$y=f(x)$、$y=f^{-1}(x)$　关于 $y=f(x)$ 对称

f 单调 $\Rightarrow$ 反函数存在且单调 . f 为双射（单射）$\Rightarrow$ 存在

反证：$x_1>x_2$，$f(x_1)>f(x_2)$

现 $y_1>y_2$，若 $f^{-1}(y_1)=x_1<f^{-1}(x_2)=x_2$，则 $y_1=f(x_1)<f(x_2)=y_2$　矛盾！

(5) 复合函数　$y=f(u)$，$u\in D_f$，$u=g(x)$，$x\in D$　$R_g\subset D_f$

$f\circ g(x)=f(g(x))$

(6) 确界.

$\max R_f$，$\max f(A)$，$\sup R_f$，$\sup f(A)$，我们也记作

$\max\limits_{x\in D_f} f(x)$，$\max\limits_{x\in A} f(x)$，$\sup\limits_{x\in D_f} f(x)$，$\sup\limits_{x\in A} f(x)$

例：$\sup\limits_{x,y\in[a,b]}|f(x)-f(y)| = \sup f([a,b]) - \inf f([a,b])$

① $f(x)-f(y)\le \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) - \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

② $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0,y_0\in[a,b]$，s.t.

$f(x_0)>\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)-\frac{\varepsilon}{2}$　$f(y_0)<\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)+\frac{\varepsilon}{2}$

$|f(x_0)-f(y_0)| > \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) - \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) - \varepsilon$　　用定义证☆

初等函数：$y=c$，$y=x^\alpha$，$y=a^x$，$y=\log_a x$，(反)三角 $\Rightarrow$ 基本初等函数

二、极限与连续

数列极限：

收敛：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n>N$，s.t. $|x_n-A|<\varepsilon$

发散：$\exists\varepsilon>0$，$\forall N\in\mathbb{N}$，$\exists n>N$，s.t. $|x_n-A|\ge\varepsilon$

性质：唯一，有界，保号，保序，夹逼

小例子：

$\dfrac{n^k}{a^n}\to 0\quad (a>1)$　$\left[\dfrac{(n^k)^{\frac{1}{n}}}{a}\right]^n$

$\dfrac{a^n}{n!}\to 0$　$\dfrac{a}{1}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{3}\times\cdots\times\underbrace{\dfrac{a}{[a]+1}\times\cdots\times\dfrac{a}{n}}_{\le 1}\le\dfrac{a}{1}\times\cdots\times\dfrac{a}{[a]}\times\dfrac{a}{n}$

无穷小量：若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$，则称数列 $\{x_n\}$ 为无穷小量

定理6：有限个无穷小量之和，无穷小量与有界量之积 } 无穷小量

定理7：$\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow\exists$ const A，$\exists$ 无穷小量 $\{\alpha_n\}$，s.t. $x_n=A+\alpha_n$

无穷大量：$\forall M>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n>N$，s.t. $|x_n|>M$，则称数列 $\{x_n\}$ 为无穷大量

记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$。同理有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$　（只是记号）

"趋于无穷"，把以上称为广义极

应用于 $\dfrac{\sum a_i}{n}\to a$ when $a_n\to a$

Stolz定理：当 $\{y_n\}$ 为严格单调增加的无穷大量，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=a$.　注：a可以是有限量，或 $+\infty$、$-\infty$.

证：先用 $a=0$ 时的结论　$|x_n-x_N|<|x_n-x_{n-1}|+\cdots+|x_{N+1}-x_N|<\varepsilon(y_n-y_N)$

$\therefore\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\dfrac{x_N}{y_n}\right|<\varepsilon\left(1-\dfrac{y_N}{y_n}\right)<\varepsilon$

$\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right|-\left|\dfrac{x_N}{y_n}\right|<\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\dfrac{x_N}{y_n}\right|<\varepsilon$

故：$\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right|<2\varepsilon$　□！

$a=+\infty$ 时　有 $x_n-x_{n-1}>y_n-y_N$

故：$x_n-x_N>y_n-y_N$，x_n 也是无穷大量

收敛准则

单调+有界 $\longrightarrow$ 收敛 ；单调+无界 $\longrightarrow$ 正负无穷大量.

例：$\left\{n\sin\dfrac{180^\circ}{n}\right\}$

证：考虑 $n>3$ 时的情况. 令 $t=\dfrac{180^\circ}{n(n+1)}$

$a_n=n\cdot\sin[(n+1)t]$，$a_{n+1}=(n+1)\sin(nt)$，$\sin[(n+1)t]=\sin(nt)\cos t+\sin t\cos(nt)=\sin(nt)\left[\cos t+\dfrac{\sin t}{\tan(nt)}\right]$

$\therefore\sin(n+1)t\le\sin(nt)\left(1+\dfrac{\tan t}{\tan(nt)}\right)$，$\tan(nt)=\dfrac{\tan t+\tan(n-1)t}{1-\tan t\tan(n-1)t}>\tan t+\tan(n-1)t>n\tan t$

故 $a_{n+1}>a_n$　有界怎么严谨证？（面积：$n\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4$）

例：$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}})$，$a>0$，$x_1>0$

$x_n-x_{n-1}=\frac{1}{2}(\frac{a}{x_{n-1}}-x_{n-1})$ 且 $x_n>\sqrt{a}$（对钩函数）

$\Rightarrow x_n\uparrow$

例：$x_n=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$

$=\frac{1+a_n-1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$

易知 $x_n\uparrow$，且 $x_n=1-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}\le 1$ 有界

☆ e相关

$(1+\frac{1}{n})^n$ 单增，$(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 单减 ☆

① $x_n=(1+\frac{1}{n})^n=(1+\frac{1}{n})^n\cdot 1\le\left(\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$ 当均值符号相反时取用倒数

② $\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\le\left(\frac{(n+1)(\frac{n}{n+1})+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$

且：$2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4$ $\Rightarrow$ 有界 $\quad \ln\frac{n+1}{n}$

$\Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 故 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

例：Euler 常数 $b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$

①单减：$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}<0$

②有上界：$b_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n\ge\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}>0$

故 b_n 收敛

闭区间套定理

Definition：闭区间套：$\{[a_n,b_n]\}$ 满足：(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.

则 $\exists!\xi$，s.t. $\forall n$，$\xi\in[a_n,b_n]$ 且 $\xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$

证：显然，a_n 单增有上界，b_n 单减有下界.

且记 $\beta=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}[(b_n-a_n)+a_n]=\lim_{n\to\infty}a_n$

故 $a_n\le\xi\le b_n$

若 $\exists\xi'\ne\xi$ 有 $a_n\le\xi'\le b_n$，由夹逼定理：$\xi'=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$

矛盾！

开区间不行 $(0,\frac{1}{n})$

实数不可列

设其可列：$R=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，找到 $x_1\notin[x_1,x_2]$

三等分 $[x_1,x_2]\to$ 至少有1个区间满足 $x_2\notin[x_3,x_4]$ ⋯⋯ 以此类推⋯

则 $\forall n$，$\exists\xi\in R$，有 $\xi\in[x_{2n-1},x_{2n}]$ 则 $\xi\notin R$ 矛盾.

子列

两个子列收敛于不同极限 $\longrightarrow$ 数列发散

Bolzano-Weierstrass定理：有界数列必有收敛子集.

证：设 $\{x_n\}$ 有界，于是 $\exists a,b\in R$ 满足：$a_1\le x_n\le b_1$

如下构造闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$

二分法，每次取有无穷多个数列的那个

从 $[a_1,b_1]$ 中选 x_{n_1}，从 $[a_2,b_2]$ 中选 x_{n_2} ⋯⋯ $\to$ 构成 $\{x_{n_k}\}$

$a_n\le x_{n_k}\le b_n$

基本数列定义：（Cauchy 数列）

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in Z^+$，st. $n,m>N$ 时成立 $|x_n-x_m|<\varepsilon$

也可表示为：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in Z^+$，$\forall n>N$ 时，$\forall p\in N$，s.t. $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$

ε 和 p 无关，和 N 有关

$\{x_n\}$ 为基本数列 $\Leftrightarrow$ $\forall p\in N$：$\lim_{n\to\infty}|x_{n+p}-x_n|=0$ $\quad$ sup？

反例：$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

上下极限

上极限 lim

有界数列收敛 $\Leftrightarrow$ 上、下极限相等

$\overline{\lim_n}x_n=\underline{\lim_n}x_n \Longleftrightarrow \lim_n x_n$ 存在.

Cauchy 收敛原理：$\boxed{\text{实数系的完备性}}$

数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{x_n\}$ 是基本数列

Proof1：必要性：$|x_n-x_m|\le|x_n-a|+|x_m-a|<\varepsilon$（易证，Proof2 同理）

充分性：有界 + 用子列 性质

$\{x_n\}$ 为基本数列：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in Z^+$，$n,m>N$ 时，$|x_n-x_m|<\varepsilon$

有界：取 $\varepsilon=1$，$|x_n-x_{N_0}|\le 1$ $\Rightarrow$ $x_n\le|x_{N_0}|+1$

故 $\{x_n\}$ 上界为 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_{N_0-1},|x_{N_0}|+1\}$

收敛：由 B-W定理，存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 有极限

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n,n_k>N$ 时，$|x_n-x_{n_k}|<\frac{\varepsilon}{2}$

当 $k>K$ 时，$|x_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore |x_n-a|<|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a|<\varepsilon$ $\quad$ Qed

Proof2：

充分性：有界性同 Proof1

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N'$，s.t. $n>N'$ 时，$|x_n-x_{N'+1}|<\varepsilon$

$\Rightarrow x_{N'+1}-\varepsilon<x_n<x_{N'+1}+\varepsilon$

$\Rightarrow x_{N'+1}-\varepsilon\le\underline{\lim_n}x_n\le\overline{\lim_n}x_n\le x_{N'+1}+\varepsilon$

$\Rightarrow 0\le\underline{\lim_n}x_n-\overline{\lim_n}x_n\le 2\varepsilon$ $\quad$ 由 ε 的任意性 $\Rightarrow$ $\underline{\lim_n}x_n=\overline{\lim_n}x_n$

https://zhuanlan.zhihu.com/p/48859870

闭区间套定理 —→ 有限覆盖定理

> 4 有限覆盖定理
> 如果开区间所形成的开区间集 E 覆盖一个闭区间 $[a,b]$ ，那么总可以从 E 中选取有限个开区间，使得这有限个开区间覆盖 $[a,b]$ 。

证明：用反证法。假设 $[a,b]$ 不能被 E 中的有限个开区间覆盖。

等分 $[a,b]$ 为两个区间： $[a,\frac{a+b}{2}],[\frac{a+b}{2},b]$ ，则其中至少有一个区间不能被 E 中有限个开区间覆盖，设为 $[a_1,b_1]$ 。再等分 $[a_1,b_1]$ 为两个区间，则其中也是至少有一个区间不能被 E 中有限个开区间覆盖，记为 $[a_2,b_2]$ 。这个过程可以无限重复下去，这就得到了一个无穷闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 。显见它满足以下三个条件：

①每一个闭区间 $[a_n,b_n]$ 都不能被 E 中有限个开区间覆盖。

② $[a,b]\supseteq[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\ldots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\ldots$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$

由②③，根据闭区间套定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$ 且 $c\in[a,b]$

由覆盖的定义知 E 中有一个开区间 (α,β) 使 $c\in(\alpha,\beta)$

由数列极限的保序性知道， $\exists N\in\mathbb{Z}^+\ \forall n>N\ (\alpha<a_n<b_n<\beta)$

也即 $\forall n>N\ ([a_n,b_n]\subseteq(\alpha,\beta))$ 。这表明，只要是形如 $[a_n,b_n]$ $(n>N)$ 的闭区间，都可以被一个开区间 (α,β) 覆盖，但这和①是矛盾的。 □

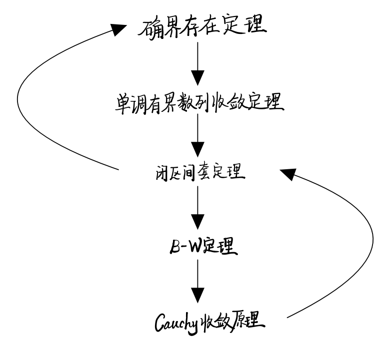
有限覆盖 → 聚点定理

4→5

> 5 聚点定理
> 每个 $\mathbb{R}$ 上无穷、有界的子集 S 都有至少一个聚点。

证明：因为 S 有界，所以它包含于一个闭区间 $[a,b]\supseteq S$ 。现在证明 S 有聚点。

反证法。假设 S 没有聚点，那么每个 $x\in[a,b]$ 的邻域 $O(x,\delta_x)$ 至多含 S 中有限个数。定义 $E=\bigcup\limits_{x\in[a,b]}O(x,\delta_x)\supseteq[a,b]\supseteq S$ ，由有限覆盖定理， E 中有限个开区间就可以覆盖 $[a,b]$ ，即 $\exists N\in\mathbb{Z}^+\ (E'=\bigcup\limits_{k=1}^{N}O(x_k,\delta_{x_k})\supseteq[a,b]\supseteq S)$ 。由于每一个 $O(x_k,\delta_{x_k})$ 都至多含 S 中有限个数，故 E' 至多含 S 中有限个数，又 $E'\supseteq S$ ，故 S 至多含有限个数，与 S 是无穷集合矛盾。 □



第三章 函数极限与连续函数

Defination. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x$ $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$

δ邻域: $O(x_0,\delta)$

δ去心邻域 $O(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$, $\mathring{U}(x_0,\delta)$

例: $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|<\frac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|$$

取δ时要考虑x定义域 $\Rightarrow \delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\}$

Qed.

聚点

在证明四则运算时很有用

性质: 惟一性(易知)

局部保序性 (取 $\varepsilon=\frac{A-B}{2}$) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$, $\exists\delta$, $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$, $f(x)>\frac{A}{2}$

$\Downarrow$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, $\exists r$, $\forall x\in\mathring{U}(x_0,r)$, 有 $f(x)\geq g(x)$, 则 $A\geq B$

局部有界性

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\exists\delta>0$, 则$f(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta)$中有界

例: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 重要的极限

由几何: $\sin x<x<\tan x$ $\Rightarrow$ $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ (when $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 或 $0<x<\frac{\pi}{2}$)

$|\cos x-1|=2\sin^2\frac{x}{2}\leq\frac{x^2}{2}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

由夹逼定理可得

无限个无穷小?

函数四则运算可以用无穷小的方法

Heine归并定理

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是: $\forall\{x_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$, 相应的有 $\lim\limits_{x\to n}f(x_n)=A$

必要性✓

充分性:

反证: 若$f(x)$不以A为极限: $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall\delta>0$, $\exists x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 有 $|f(x)-A|\geq\varepsilon$

$\Rightarrow$构造出一个数列 s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $|f(x_n)-A|\geq\varepsilon$.

升级版'

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是: $\forall\{x_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$, 相应的有 $\{f(x_n)\}$收敛

单侧极限: $-\delta<x-x_0<0$ —— 左极限 $0<x-x_0<\delta$ —— 右极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+}f(x)=A=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

$f(x+0)$ $f(x-0)$

水平渐近线

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right]^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}$$

函数连续性

$f(x)$在x_0点连续 iff $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ (还有左连续和右连续)

三类不连续点

1、左右极限都存在但不相等 (跳跃间断点)

2、左右极限有至少1个不存在 (有1个$\to\infty$, 无穷间断点) (振荡间断点)

3、左右极限都存在且相等, 但$f(x)$在x_0处无意义或不等于$f(x_0)$ (可去间断点)

例: Riemann 函数 $R(x)=\begin{cases}\frac{1}{p}, & x=\frac{q}{p}\ (p\in N^+,\ q\in Z\setminus\{0\},\ (p,q)=1)\\ 1, & x=0\\ 0, & x\in R\setminus Q\ (\text{无理})\end{cases}$ → 以1为周期

$R(x)$在无理数点连续, 在有理点间断

自变量增量 Δx. 函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ —— 可以用它来做

反函数连续性定理

① $y=f(x)$严格单调, 则其反函数存在且严格单调

② $y=f(x)$在$[a,b]$上连续且严格单增, $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$。则 $x=f^{-1}(y)$在$[\alpha,\beta]$上连续且严格单增.

Proof 2: 1° $y=f^{-1}(x)$定义域为$[\alpha,\beta]$ 2° 单增 3° 用定义找δ

或: $|\Delta x|=|x-x_0|<\delta$, $|\Delta y|=|y-y_0|<\varepsilon$ —— 对称的

复合函数的连续性

若 $u=g(x)$在点x_0处连续, $g(x_0)=u_0$. $y=f(u)$在点u_0处连续

$\Rightarrow$ $f\circ g(x)$在x_0处连续

证: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1$, $\forall u\in U(u_0,\delta_1)$, $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$

$\exists\delta_2$, $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$, $|g(x)-u_0|<\delta_1$

$\therefore$ $|f\circ g(x)-f\circ g(x_0)|<\varepsilon$

复合函数的极限

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, 且 $a\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时 $\varphi(x)\neq a$, 又 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

来自题干

证: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta$, $\forall u\in\mathring{U}(u_0,\eta)$, $|f(u)-A|<\varepsilon$

$\exists\delta_2$, $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$, $0<|\varphi(x)-a|<\eta$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时, $0<|\varphi(x)-a|<\eta$ 于是 $|f(\varphi(x))-A|<\varepsilon$

例: $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\right)=\max\{f(x),g(x)\}$ ☆

例: $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=+\infty$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to x_0}[1+u(x)]^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}u(x)v(x)}$$

无穷小量与无穷大量的阶

defination: $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$，则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量.（以下的 $u(x)$, $v(x)$ 都是无穷小量）

(1) 当 $\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是高阶无穷小量（u、v 反过来是低阶）

记为 $u(x)=o(v(x))\quad(x\to x_0)$

(2) 若存在 $A>0$，当 x 在 x_0 的某个去心邻域中，成立 $\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le A$

则称当 $x\to x_0$ 时 $\frac{u(x)}{v(x)}$ 是有界量

记为 $u(x)=O(v(x))\quad(x\to x_0)$

Particularly，若 $\exists A, a>0$，当 x 在 x_0 的某个去心邻域中，$a\le\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le A$

则称当 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是同阶无穷小量

(3) 当 $\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{[v(x)]^k}=C\ne 0$，则称当 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是 k 阶无穷小量

(4) 当 $\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=1$，则称当 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是等价无穷小量

记为 $u(x)\sim v(x)\quad(x\to x_0)$

defination: $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$（或 $\pm\infty$），则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷大量.（以下的 $u(x)$, $v(x)$ 都是无穷大量）

(1) 当 $\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=+$，则称当 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是高阶无穷小量（u、v 反过来是低阶）

记为 $u(x)=o(v(x))\quad(x\to x_0)$

(2) 若存在 $A>0$，当 x 在 x_0 的某个去心邻域中，成立 $\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le A$

则称当 $x\to x_0$ 时 $\frac{u(x)}{v(x)}$ 是有界量

记为 $u(x)=O(v(x))\quad(x\to x_0)$

Particularly，若 $\exists A, a>0$，当 x 在 x_0 的某个去心邻域中，$a\le\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le A$

则称当 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是同阶无穷大量

(3) 当 $\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{[v(x)]^k}=C\ne 0$，则称当 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是 k 阶无穷大量

(4) 当 $\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=1$，则称当 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是等价无穷大量

记为 $u(x)\sim v(x)\quad(x\to x_0)$

例：求证 $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x\quad(x\to 0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{\frac{1}{n}x\left(\sqrt[n]{1+x}^{\,n-1}+\sqrt[n]{1+x}^{\,n-2}+\cdots+1\right)}=1$$

练习：

1. 设 $x_1\in(0,1)$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，$n=1,2\cdots$　　Stolz

$\lim x_n=0\qquad \lim n x_n=1$

2、设 $\{a_n\}$ 是一个数列，$b_n=\sum_{1}^{n}a_i$ 收敛，又 $\{p_n\}$ 为严格正数列

且 $p_n\to+\infty$

证：$\lim_{n}\frac{p_1a_1+\cdots+p_na_n}{p_n}=0$

$\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 不一致连续

$\exists\varepsilon>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x', x''\in(0,1]$ 且 $|x'-x''|<\delta$.

有 $\left|\frac{1}{x_0+\delta}-\frac{1}{x_0}\right|=\left|\frac{\delta}{x_0(x_0+\delta)}\right|>\frac{\delta}{x_0(\delta+1)}>\varepsilon$

四.导数与微分

导数定义

Defination 1：$f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导。

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$ ，等价表示：$y'(x_0)$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$

Defination 2：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\quad f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Defination 3：$f(x)$ 在 (a,b) 内可导，记为 $f(x)\in D(a,b)$

$f(x)$ 在区间 or 其并集 I 上可导，记为 $f(x)\in D(I)$，并称 $f'(x)$ 为 I 上的导函数

定理：$f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处必定连续

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

减弱条件：$f(x)$ 在点 x_0 处左、右导数都存在 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处连续

$$\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^{2h}$$

复合函数求导 链式法则

$y=f(u)$ 在点 u_0 处可导，$u=g(x)$ 在点 x_0 处可导 $(u_0=g(x_0))$

有 $[f(g(x))]'=f'(u_0)\,g'(x_0)$

Attention：以下是不严谨的

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\left.\frac{dy}{du}\right|_{u=u_0}\cdot\left.\frac{du}{dx}\right|_{u=u_0}$$

Δu 不能为 0

Proof：$A(u)=\begin{cases}\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}, & u\neq u_0\\ f'(u_0), & u=u_0\end{cases}$ 易知 $A(u)$ 在 u_0 连续

$\Rightarrow f(u)-f(u_0)=A(u)(u-u_0)$

$\Rightarrow f(g(x))-f(g(x_0))=A(u)(g(x)-g(x_0))$

$\Rightarrow \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=A(u)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

故 $(f(g(x)))'=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}A(u)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

$=f'(u_0)\cdot g'(x_0)$

反函数求导法则

设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续且严格单调，在点 x_0 处可导且 $f'(x_0)\neq 0$

则：$f(x)$ 反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 y_0 处可导且 $\varphi'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$

例：$y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 反函数

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

隐函数

Talor 展开

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x= x -\frac{x^2}{3!} +\frac{x^3}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\cdot x^{2n-1}+o(x^{2n-1})$$

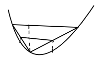
$\cos x=$

例：
$$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{6}+\frac{\sin^4 x}{24}+\frac{\sin^5 x}{120}+o(\sin^5 x)$$
$$=1+\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^2$$
$$+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^3+\frac{1}{24}\left(x+o(x^2)\right)^4+\frac{1}{120}\left(x+o(x)\right)^5$$
$$=1+x+\frac{1}{2}x^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^3+\left(\frac{1}{2}\times 2\times\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{24}\right)x^4+\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{6}\times 3\times\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{120}\right)x^5$$
$$=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$$

练习：

$\forall x_1,x_2$

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

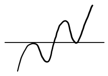


$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

$f\left(\frac{x_1+\frac{x_1+x_2}{2}}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{2}$

Jensen 不等式

Mid-term



(构造……)

17、

Proof by contradiction:

若 $\exists x_0 \in (0,+\infty)$, $f(x_0) \neq f(0)$

则由 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$\exists \delta > 0$, $\forall x \in U(x_0, \delta)$ 时，$f(x) \neq f(0)$

由于 $T_0 = \inf E = 0$. $\exists T \in \exists$, $T < 2\delta$

$\Rightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$, $f(0+nT) \in U(x_0,\delta)$，有 $f(0) \neq f(0+nT)$ 矛盾.

16、设函数 $f(x)$ 在 Ia

不定积分

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

① $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2}{1+x} d(\sqrt{x}) = 2\arctan(\sqrt{x}) + C$

② $\int \frac{x-2}{\sqrt{2x^2+4x+5}} dx = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{2(x+1)^2+3}}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{d(2x^2+4x+5)}{\sqrt{2x^2+4x+5}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}x+\sqrt{2})}{\sqrt{3+(\sqrt{2}x+\sqrt{2})^2}}$

$= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{2x^2+4x+5} - \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2}+\sqrt{2(x+1)^2+3}\right) + C$

③ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \overset{x=t^6}{=\!=} \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int (t^2-t+1)dt - 6\int \frac{dt}{t+1}$

$= 6\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t\right) - 6\ln(t+1) + C$

$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C$

④ $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$　设 $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$　$(t^3-1)^4 = x$

$= \int \frac{t}{(t^3-1)^2} 4(t^3-1)^3 \cdot 3t^2 dt$

⑤ $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$　$u = \tan\frac{x}{2}$

⑥ $\int \frac{\sin x}{2\sin x + 3\cos x} dx$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$　在 $[0,1]$ 上可积

$\exists I \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall$ 分划 π 与介点集 $\xi(\pi)$ 当 $\|\pi\| < \delta$ 时，$\left|\sum f(\xi_i)\cdot\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$

$\sum\left(\frac{1}{\xi_i} - \left[\frac{1}{\xi_i}\right]\right)\cdot\Delta x_i$

定积分

闭区间连续 ⇒ 有界

$$\sum w_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum \Delta x_i < \varepsilon$$

w_i 可以很小 $< \frac{\varepsilon}{b-a}$

连续