补：无穷乘积

Defination $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$.

若$\{P_n\}$收敛于一个非0的有限数P，则称$\prod_{k=1}^{\infty} p_k$收敛；否则发散

必要条件：If $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$收敛，则：$\begin{cases} (1)\ \lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1 \\ (2)\ \lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{n=m+1}^{\infty} p_n = 1 \end{cases}$ ，因而可令$p_n = 1 + a_n$ ，便有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Wallis公式：

$p_n = 1 - \frac{1}{(2n)^2}$ ，则$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k+1)}{2k\cdot 2k} = \frac{[(2n-1)!!]^2}{[(2n)!!]^2}\cdot 2n+1$ 。同时考虑积分$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ ，then $I_n = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=2k \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n=2k+1 \end{cases}$

故$P_n = \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\cdot\frac{2}{\pi}$ ，由于$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$ ，有$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$

∴由夹逼定理：$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{2}{\pi}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = 1\right)$

Viète公式 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$ ，特别地$x = \frac{\pi}{2}$时有 $\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cdots$

几个充要条件 ① $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$收敛$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$收敛

② $a_n > 0$ (or $a_n < 0$)，则$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛　（因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$）

③ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛　$\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$绝对收敛，则称$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$绝对收敛

Stirling公式：$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$

设$b_n = n!e^n / n^{n+\frac{1}{2}}$

则$\frac{b_n}{b_{n-1}} = e\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} = \exp\left[1 + (n-\tfrac{1}{2})\ln(1-\tfrac{1}{n})\right] = \exp\left[-\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1 - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

令$1 + a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}}$，有$\sum a_n$收敛，即$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}$收敛

记$A = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_1 \prod_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}}$

$A = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{b_{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sqrt{\frac{2}{n}} = \sqrt{2\pi}$

级数判别法：

比较判别法 及其极限形式 ($\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = l \in (0,+\infty)$, then $\sum x_n, y_n$ 同敛散) 分析阶数

Cauchy 判别法 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}$ $\begin{cases} <1 & 收敛 \\ >1 & 发散 \\ =1 & \end{cases}$

d'Almbert 判别法 $\begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1，收敛 \\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1，发散 \end{cases}$

Raabe 判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$ $\begin{cases} >1 & 收敛 \\ <1 & 发散 \end{cases}$

积分判别法：$\sum f(n)$ 与 $\int_1 f(x)dx$ 同敛散

A-D判别法：$\begin{cases} a_n单调有界，\sum b_n收敛 \\ a_n单调\to 0，\sum b_n有界 \end{cases}$

函数项级数

一、函数项级数的一致收敛性

Def：函数项级数，收敛点，收敛域，和函数，点态收敛 → $\sum u_n(x)$ 在D上点态收敛于$S(x)$

把点固定

几个反例：

1、$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} S_n(x)$? × 　$S_n(x) = x^n$

2、$\frac{d}{dx}\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{d}{dx} S_n(x)$? 　$S_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$　$S_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$　或 $S_n(x) = \sum^{n}\frac{1}{2^i}\cdot\cos(3^i x)$

3、$\int\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int S_n$?

1°不可积的$\lim S_n$：$S_n(x) = \begin{cases} 1, & x\cdot n! \in \mathbb{Z} \\ 0, & x\cdot n! \notin \mathbb{Z} \end{cases}$, $x \in (0,1)$ $\Rightarrow$ 和函数为 $D(x)$

2°就算是可积：$S_n(x) = nx(1-x^2)^n$ 之收敛域为$[0,1]$

一致收敛

def：$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall x \in D$, s.t. $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ 　记作$S_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$

"内闭"：$\forall [a,b] \subset D$，$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$

"带状区"

f, g定义于D，define：$d(f,g) = \sup\limits_{x\in D}|f(x) - g(x)|$

Thm：$S_n \rightrightarrows S$ iff $\lim\limits_{n\to\infty} d(S_n, S) = 0$ —— 一般用求导算出最大值（夹逼） significance

Thm：$S_n \rightrightarrows S$ iff $\forall \{x_n\}, x_n \in D$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n(x_n) - S(x_n)) = 0$ （证明以反证法）

判别

Thm：Cauchy $S_n \rightrightarrows S$ iff $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m > n > N$, s.t. $|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$ （S_n是Cauchy列）

Thm：Weierstrass if $|u_n(x)| < a_n$ 且 $\sum a_n$收敛，则 $S_n \rightrightarrows S$ （by 数项级数知识）求导找$u_n(x)$最大值

Thm：Abel and Dirichlet：$\sum a_n(x) b_n(x)$ （Abel变换）—— 离散的"分步积分"

(1) $\{a_n(x)\}$ 对每一固定x单调且一致有界 + $\sum b_n(x)$一致收敛

(2) $\{a_n(x)\}$ 对每一固定x单调且$\to 0$ + $\sum b_n(x)$有界

性质：(在开区间内闭一致连续亦可) → 局部概念

1.连续相关：$\{S_n(x)\}$每一项$S_n(x)$在$[a,b]$连续 且 $S_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$，则$S(x)$在$[a,b]$上连续　(using defination)

1 prime：$u_n(x) \in C(a,b)$ 且 $\sum u_n(x)$内闭一致收敛于$S(x)$，then $S(x) \in C(a,b)$

2、积分相关：$\forall n$, $S_n(x) \in C[a,b]$ 且 $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$，then $\int_a^b S(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)$ —— 可用于求Taylor级数

3.求导相关：(1) $S(x)$于$[a,b]$上有连续的导函数
(2) $\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上点态收敛于$S(x)$
(3) $\{S_n'(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$\sigma(x)$
then $\frac{d}{dx}S(x) = \sigma(x)$ （using the 2：$\int_a^x \sigma(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^x S_n'(x)dt$）

proofs：

1、$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$，$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$ —— 找δ

已知：$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$，$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ 且 $|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$
$\exists \delta_0 > 0, \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$，$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \varepsilon$
三角不等式

2、Easy but ...

$\left|\int_a^b S_n(x)dx - \int_a^b S(x)dx\right| \le \int_a^b |S_n(x) - S(x)|dx \le (b-a)\varepsilon$

3、Easy ...

Thm. Dini：(1) $S_n(x) \in C.[a,b]$ (2) $S(x) \in C.[a,b]$ (3) $\forall x \in [a,b]$，$\{S_n(x)\}$ 单调 then $S_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$

proof：(1)

$\forall x_0 \in [a,b]$，$\forall \varepsilon > 0$：

$\exists \delta > 0$，$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$，$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \varepsilon$ 且 $|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$

$\exists N \in \mathbb{N}$，$\forall n > N$，$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$

$\{S_n(x_0)\}$ 单调且收敛于 $S(x_0)$

反证：

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists n > N, \exists x \in [a,b]: |S_n(x) - S(x)| \geqslant \varepsilon_0$。

依次取：

$N = 1, \exists n_1 > 1, \exists x_1 \in [a,b]: |S_{n_1}(x_1) - S(x_1)| \geqslant \varepsilon_0$，

$N = n_1, \exists n_2 > n_1, \exists x_2 \in [a,b]: |S_{n_2}(x_2) - S(x_2)| \geqslant \varepsilon_0$，

……

$N = n_{k-1}, \exists n_k > n_{k-1}, \exists x_k \in [a,b]: |S_{n_k}(x_k) - S(x_k)| \geqslant \varepsilon_0$，

……

$\{x_k\}$ 有收敛子列（B-W定理），为方便在此便认为是 $\{x_k\}$ 本身，$x_k \to \xi \in [a,b]$，$n_k \to +\infty$

$\exists N$，$|S_N(\xi) - S(\xi)| < \varepsilon_0$

三角不等式

$\exists K, \forall k > K$，$|S_N(x_k) - S(x_k)| < \varepsilon_0$（利用 $S_n(x)$ 与 $S(x)$ 连续）

单调：$\forall n > N$，$|S_n(x_k) - S(x_k)| < |S_N(x_k) - S(x_k)| < \varepsilon_0$

与 $|S_{n_k}(x_k) - S(x_k)| \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾

处处不可导的连续函数

“离整数多近”

def：$\varphi(x) = \min\{x - [x], [x]+1-x\}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(10^n x)}{10^n x}$ or $\sum \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$

见教材P58 (电子) 构造

幂级数 $\sum a_n \cdot x^n$

收敛半径

$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n x^n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \cdot |x|$，记 $A = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$ Significant ☆

Thm Cauchy-Hadamard：当 $|x| < R$ 时绝对收敛，当 $|x| > R$ 时发散，$|x| = R$ 时另行判断收敛 or not

Thm d'Alembert：$R = \frac{1}{A}$，$A = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$（using 不等式）

Thm Abel (second)：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 的收敛半径为 R，then：

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 在包含于收敛域中的任意闭区间上一致收敛

幂函数于收敛域上连续、可积、可导

幂级数展开

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x}^{x_0} f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = \frac{f^{n}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

一些展开：$\arctan x = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot x^{2n-1}$

$\sin x = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$\cos x = \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1}$

$\ln(1+x) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

$\arcsin x = x + \sum \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0} (-x)^n$

练：展开 $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180}$