Euclid空间

思想：用一维时的结论☆ + 每一维收敛 → 点收敛

Defination：$\mathbb{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R},i=1,\cdots,n\}$，$\mathbb{R}^n$中的元素称为向量or点、

内积运算：$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$　正定性、对称性、线性性

Cauchy-Schwarz不等式　$\langle x,y\rangle^2\le\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

距离：$|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$，并称 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ 为 x 的Euclid范数　正定性＆对称性 与 三角不等式

邻域：设 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$，$\delta>0$，$O(a,\delta)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x-a|<\delta\}$ 邻域，a为该邻域的中心，δ为半径

极限：设$\{x_k\}$是$\mathbb{R}^n$的点列，若存在定点 $a\in\mathbb{R}^n$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists K\in\mathbb{N}$，$\forall k>K$ 有 $|x_k-a|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}x_k=a$

一个点列不收敛就发散

有界性：S是$\mathbb{R}^n$上的点集，$\exists M\in\mathbb{R}$，$\forall x\in S:\|x\|\le M$

内点：$\exists$邻域$O(x,\delta)$完全落于S中．外点：$\exists$邻域$O(x,\delta)$都不落在S中　边界点：非前二者 ∂S

聚点：任意邻域内有S中无限个点。可能在S中，也可能不在．记为S'　iff $\exists\{x_k\}$，$\lim_{k\to\infty}x_k=x$

开区间：S中每个点都是内点、

闭区间：S中包含了它所有的聚点、

S与它的聚点全体S'的并集称为S的闭包 $\bar{S}$

开集的补集是闭集

Theorem：

(1) 任意一组开集$\{S_\alpha\}$的并集 $\bigcup_\alpha S_\alpha$是开集

(2) 任意一组闭集$\{T_\alpha\}$的交集 $\bigcup_\alpha T_\alpha$是闭集

(3) 有限开集的交是开集　　无限反例：$(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$

(4) 有限闭集的并是闭集　　无限反例 点→$(-1,1)$

闭矩形套定理

设 $\Delta_k=[a_k,b_k]\times[c_k,d_k]$ 是$\mathbb{R}^2$上一列闭矩形，if：

(1) $\Delta_{k+1}\subset\Delta_k$ $\wedge$ $a_k\le a_{k+1}<b_{k+1}\le b_k$ $\wedge$ $c_k\le c_{k+1}<d_{k+1}\le d_k$.

(2) $\lim_{k\to\infty}\sqrt{(b_k-a_k)^2+(d_k-c_k)^2}=0$

Then $\lim a_k=\lim b_k=\xi$，$\lim c_k=\lim d_k=\eta$

Cantor闭区域套定理

设$\{S_k\}$是$\mathbb{R}^n$空间上的非空闭集序列，满足 $S_{k+1}\subset S_k$ 以及 $\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}S_k=0$　($\operatorname{diam}S=\sup\{|x-y|\mid x,y\in S\}$)

Then $\exists!$点属于$\bigcap_{k=1}^{\infty}S_k$

Bolzano-Weierstr定理

$\mathbb{R}^n$上的有界点列$\{x_k\}$中必有收敛子列 ⟶ 至少有一个聚点、

Cauchy收敛原理

基本点列：$\mathbb{R}^n$上的点列$\{x_k\}$满足：对于任意给定的$\varepsilon>0$，$\exists$正整数K，使得$\forall k,l>K$：$|x_l-x_k|<\varepsilon$

$\{x_k\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_k\}$为基本点列

设S为$\mathbb{R}^n$上的点集，$\{U_\alpha\}$是$\mathbb{R}^n$中的一组开集．$\{U_\alpha\}$为S的一个开覆盖 iff $\bigcup_\alpha U_\alpha\supset S$

If S的任意一个开覆盖$\{U_\alpha\}$中总存在一个有限子覆盖，$\bigcup_{i=1}^{p}U_i\supset S$，则称$S$为紧集

Heine-Borel：S是紧集 iff S是有界闭集 iff S的任一无限子集在S中必有聚点、☆

proof：S是紧集 iff S是有界闭集：

1、S为紧集：　构造开覆盖：$\{O(x,1)\mid x\in S\}$ ⇒ 有限个$O(x_i,1)$可覆盖S

故有 $\forall x\in S$，$|x|\le\max|x_i|+1$ 有界.

若$\exists$聚点 $x_0\notin S$．则 $\left\{\{x\mid |x-x_0|>\frac{1}{n}\}_n\right\}$ 为一开覆盖　significant ☆

从而仅有有限个点在S之中 ⇒ 矛盾

2、若S为有界闭集

$\exists$开覆盖$\{U_n\}$满足 $S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$，不存在有限覆盖

Using 闭区域套 ⇒ 有一个点无法被有限覆盖

取小邻域 ⇒ 矛盾

S是有界闭集 iff S任一无限子集在S中必有聚点、

1、⇒ 易知，S为闭集 + B-W

2、S中任一收敛子列必收敛于S

第2节

Defination：n重极限、累次极限

Thm. $\lim_{x\to x_0}f$、$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f$、$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f$ 皆存在则相等

Defination：连续

向量值函数 ⇒ “多个 $z_i=f_i(\vec{x}_i)$”

复合映射 —— 连续的传递性

第3节

Defination_pro：连续：点集$K\subset R^n$，$f:K\to R^m$，$x_0\in K$。if $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. $x\in O(x_0,\delta)\cap K$时，有：

$$f(x)\in O(f(x_0),\varepsilon)$$

Thm. 连续映射将紧集 → 紧集

proof：$\vec{f}(K)$任一无限点集必有聚点、$\in\vec{f}(K)$ —— 点列即可

找 x_k，$\vec{f}(\vec{x}_k)=\vec{y}_k$

$\vec{x}_k\to\vec{x}_0$，then $\vec{y}_k\to\vec{f}(\vec{x}_0)$

properties：有界、最值

一致连续：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，s.t. $\forall|x'-x''|<\delta$，$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$成立

Thm. 紧集K，$f:K\to R^m$在K上一致连续 (using 有限覆盖 + 三角不等式)

defination：道路、连通、区域

Partial

defination: $\frac{\partial f}{\partial x}$, f_x

f 在开集 D 上每一点关于 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 可偏导, then f 在 D 上可偏导

可偏导不一定连续

方向导数: $\frac{\partial f}{\partial v}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(\vec{x}_0+t\vec{v})-f(\vec{x}_0)}{t}$ where $\|\vec{v}\|=1$ $(t\to 0^+)$

全微分: if $\exists$ 只与 (x_0,y_0) 有关而与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的 A,B. s.t. $\Delta Z=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

$\longrightarrow$ f 可微 (可微必连续) $df=Adx+Bdy$

Thm. 可微必可偏导, $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$; 同时 $\frac{\partial f}{\partial v}=\nabla f\cdot\vec{v}$, $\|\vec{v}\|=1$

Thm. 存在连续偏导数 $\Rightarrow$ 可微 (任意方向导数存在不一定可微 $|x|$)

grad (∇)

高阶偏导: f_{xy} 不一定与 f_{yx} 相等

Thm. f_{xy}、f_{yx} 在 (x_0,y_0) 连续 $\longrightarrow$ $f_{xy}=f_{yx}$ (过程吓人而已)

高阶微分

自变量 x_i, 易有 $d^2x_i=0$

$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有k阶连续偏导数

$d^ku=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k u$

向量值函数

$\vec{f}:D\to\mathbb{R}^m$, $y_i=f_i(x_1,\cdots,x_n)$, $i=1,\cdots,m$

Jacobi Matrix $\vec{f}'(\vec{x}_0)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)\right)_{m\times n}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0)\end{bmatrix}$ $(D\vec{f}(\vec{x}_0), J_f(\vec{x}_0))$

$\vec{f}$ 每个分量都连续 $\to$ f 连续

$d\vec{f}=\vec{f}'(x_0)d\vec{x}$ —— 可微

$\vec{f}$ 连续、可导、可微 iff 每一 $\vec{f}$ 分量连续、可导、可微

Composed

$Z=f(x(u,v),y(u,v))$, $g:(u,v)\longrightarrow\mathbb{R}^2$

g 可导, f 可微 无法减弱

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$

$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}$ 复合函数求导

Thm. $f:D_f(\subset\mathbb{R}^k)\to\mathbb{R}^m$, $g:D_g(\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^k$ 且具有连续导数

$(f\circ g)'(s,t)=f'[g(x)]\cdot g'(x)$

一阶全微分形式不变性: $d^2x=0$ (x为自变量), 否则不一定 ($u=ax+by$ 时, $d^2u=0$)

Mean value & Talor

Def: 凸区域: $\forall x,x'\in D$, $\forall\lambda\in[0,1]$, 恒有 $x+\lambda(x-x')\in D$, 且连通

Thm: (x_0,y_0)、$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in$ 凸函数 D. Then $\exists\theta\in(0,1)$,

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y$ (Hint: 构造一元函数)

Thm.

$f(x,y)$ 有 k+1 阶导数:

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+$

$\frac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$ —— Lagrange 余项

$o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}^{\,k}\right)$ —— Peano 余项

[Hard]

推论 12.3.1 如果函数 $f(x,y)$ 在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的偏导数恒为零,那么它在 D 上必是常值函数。

证 设 (x',y') 是区域 D 上任意一点,则存在 $r'>0$,使得点 (x',y') 的邻域 $O((x',y'),r')\subset D$。由定理 12.3.1,对任意的 $(x,y)\in O((x',y'),r')$,存在 $\theta(0<\theta<1)$,使得

$f(x,y)-f(x',y')=f_x(x'+\theta\Delta x,y'+\theta\Delta y)\Delta x+f_y(x'+\theta\Delta x,y'+\theta\Delta y)\Delta y=0$,

其中 $\Delta x=x-x'$,$\Delta y=y-y'$。因此

$$f(x,y)=f(x',y'),\quad (x,y)\in O((x',y'),r'),$$

即 $f(x,y)$ 在 $O((x',y'),r')$ 上是常值函数。

现设 (x_0,y_0) 为区域 D 上一定点,(x,y) 为区域 D 上任意一点,由于区域是连通的开集,所以存在连续映射 $\boldsymbol{\gamma}:[0,1]\to D$,满足 $\boldsymbol{\gamma}([0,1])\subset D$,$\boldsymbol{\gamma}(0)=(x_0,y_0)$,$\boldsymbol{\gamma}(1)=(x,y)$,即 $\boldsymbol{\gamma}$ 是区域 D 中以 (x_0,y_0) 为起点,以 (x,y) 为终点的道路。于是函数 $f(\boldsymbol{\gamma}(t))$ 在 $[0,1]$ 连续,且满足

$$f(\boldsymbol{\gamma}(0))=f(x_0,y_0),\ f(\boldsymbol{\gamma}(1))=f(x,y)。$$

记 significant

$$t_0=\sup\{s\in[0,1]\mid f(\boldsymbol{\gamma}(t))=f(\boldsymbol{\gamma}(0))=f(x_0,y_0),t\in[0,s]\},$$

则 $t_0>0$,且由 $f(\boldsymbol{\gamma}(t))$ 的连续性,有 $f(\boldsymbol{\gamma}(t_0))=f(x_0,y_0)$。

由于 $\boldsymbol{\gamma}(t_0)\in D$,根据上面的证明,存在 $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ 的邻域 $O(\boldsymbol{\gamma}(t_0),r_0)$,使得 $O(\boldsymbol{\gamma}(t_0),r_0)\subset D$,且对于一切 $(x,y)\in O(\boldsymbol{\gamma}(t_0),r_0)$,成立

$$f(x,y)=f(\boldsymbol{\gamma}(t_0))=f(x_0,y_0)。$$

如果 $t_0<1$,由 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的连续性可知,对于充分小的 $\Delta t>0$,有 $t_0+\Delta t<1$ 及 $\boldsymbol{\gamma}(t_0+\Delta t)\in O(\boldsymbol{\gamma}(t_0),r_0)$,从而又成立 $f(\boldsymbol{\gamma}(t_0+\Delta t))=f(\boldsymbol{\gamma}(t_0))=f(x_0,y_0)$,这与 t_0 的定义矛盾,于是必有 $t_0=1$。所以 $f(x,y)=f(\boldsymbol{\gamma}(1))=f(\boldsymbol{\gamma}(0))$

隐函数

Thm **定理 12.4.1(一元隐函数存在定理)** 若二元函数 $F(x,y)$ 满足条件: (证明不要求)

(1) $F(x_0,y_0)=0$;

(2) 在闭矩形 $D=\{(x,y)\mid |x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b\}$ 上,$F(x,y)$ 连续,且具有连续偏导数;

(3) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

那么

(i) 在点 (x_0,y_0) 附近可以从函数方程

$$F(x,y)=0$$

惟一确定隐函数

$$y=f(x),\quad x\in O(x_0,\rho),$$

它满足 $F(x,f(x))=0$,以及 $y_0=f(x_0)$;

(ii) 隐函数 $y=f(x)$ 在 $x\in O(x_0,\rho)$ 上连续;

(iii) 隐函数 $y=f(x)$ 在 $x\in O(x_0,\rho)$ 上具有连续的导数,且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}。$$

拓展至多元: $\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

拓展至多元向量值 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$, 记 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$

then: $\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{pmatrix}$ or: ☆ $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_j}=-\frac{\frac{\partial(F_1,\cdots,F_{k-1},F_k,F_{k+1},\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_{k-1},x_j,y_{k+1},\cdots,y_m)}}{\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}},\quad k=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n。$$

Thm、逆映射定理 (不一定考)

$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$, $(x,y)=f(u,v)$, f 有连续导数

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial v}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial x}{\partial v}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial y}{\partial u}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial u}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

几何应用

切线方程：$\frac{x-x_0}{x'(t)}=\frac{y-y_0}{y'(t)}=\frac{z-z_0}{z'(t)}$ ，法平面：$\sum x_i'(t)(x_i-x_{i0})=0$

$$\vec{\tau}=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(\vec{P_0}),\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(\vec{P_0}),\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\vec{P_0})\right)=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\F_x&F_y&F_z\\G_x&G_y&G_z\end{vmatrix}$$

法向量：$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=\nabla F$ 升维后的grad

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}\qquad\vec{n}=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\qquad\vec{r_u}\times\vec{r_v}$$

无条件极值

Thm. 设(x_0,y_0)为驻点，f在(x_0,y_0)附近具有二阶连续偏导数.

记$A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，$H=\begin{vmatrix}A&B\\B&C\end{vmatrix}$

$H>0\land A>0$，极小；$H>0\land A<0$，极大；$H<0$，非极值

拓展至k阶：$A_k=\left(f_{x_ix_j}(\vec{x_0})\right)_{ij}$，$\det A_k>0$，极小；$(-1)^k\det(A_k)>0$，极大 $(k=1,2,\cdots,n)$

Lagrange：

$\left(\frac{\partial^2L}{\partial x_k\partial x_l}\right)_{n\times n}$ 正→小，负→大

$x\in(0,1)$，$y>0$，then $yx^y(1-x)<\frac{1}{e}$