重积分

Def: 面积、取划分 $U_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{i-1},y_i]$，包含于的面积、交集非空的面积，上确界、下确界相同 ⇒ 可求面积的

|iff

$\forall\varepsilon>0$，∃划分，$m_B - m_A<\varepsilon$

Def: 零边界区域，边界 ∂D 的面积为 0

Thm. D 可求面积 iff ∂D 面积为 0

二重积分

Def: 二重积分 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$（与区域分法、$(\xi_i,\eta_i)$ 取法无关）

Corollary: $s\le\sup\{s\}\le\inf\{S\}\le S$，$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta\sigma_i=0$

Thm. f 在零边界区域 D 上连续，then 它在 D 上可积（放宽：f 有界 ∧ 至多于有限条、面积为 0 的曲线上不连续）

多重积分

$\int_\Omega f\,dV=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta V_i$，$x_i\in\Delta\Omega_i$

properties: 线性、区域可加，保序，绝对可积，乘积可积，积分中值定理

Thm. $f(x,y)$ 在 D 上可积，$h(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$，$h(x)$ 存在、可积 ⇒ $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$

corollary f 连续 ⇒ 累次积分

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y^2}, & 0<x<y<1\\ -\frac{1}{x^2}, & 0<y<x<1\\ 0\end{cases}$$

significant ☆ 反例

奇函数

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}\quad (u,v)\in D'\longrightarrow D \quad 一一对应$$

□ in D'

Jaccobi 行列式的意义

Then $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$（use Talor）

趋于平行四边形

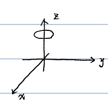
积分域简单 or 分离变量

significant

$xy+yz+zx$，$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\sum_{cyc}x^2=4$

↓

为 0，xy 关原点对称

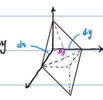


曲线、场论

妙！

$x^2+y^2+z^2=a^2$ with $x+y+z=0$，solve $\oint_\Gamma x^2\,ds$　对称性：$\oint x^2\,ds=\oint\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)\,ds$

Thm. 思考：$dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dx\,dy$



$dS\cos\theta=dx\,dy$　法向量：$(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1)$

例：Σ: $x^2+y^2+z^2=2(x+y+z)$，求 $\oiint_\Sigma(x^2+y^2)\,dS$（用对称性 + 重心/移原点）

$I=\frac{2}{3}\oiint_\Sigma x^2+y^2+z^2\,dS$

Def & Thm. 曲面参数方程　$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$　$E=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u$，$G=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v$，$F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v$　Gauss 系数 $\sqrt{EG-F^2}$　Significant

Def 第二类曲线积分　$\int_L \underbrace{P\,dx}_{对x曲线积分}+\underbrace{Q\,dy}_{对y}$ where $\vec{F}=(P,Q)$　亦即 $\int_L\vec{F}\cdot d\vec{s}$ where $d\vec{s}=(dx,dy)$

Def. 反向弧 L^-

$\int_L\vec{A}\,d\vec{s}=\int_L\vec{A}\,\vec{t}\,ds$ where $\vec{t}$ 为 $d\vec{s}$ 单位方向

$d\vec{S}=\vec{n}\,dS=(dy\,dz,\,dz\,dx,\,dx\,dy)$　$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$　$\iint_\Sigma\vec{A}\,d\vec{S}$　$dy\,dz=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,dx\,dy$

例：$\iint_\Sigma xyz\,dx\,dy$，$x^2+y^2+z^2=1$，$x,y\ge 0$，外侧

例：$\iint_\Sigma(z^2+x)\,dy\,dz-z\,dx\,dy$，$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$、$z=0$、$z=2$ 下侧（Using $dy\,dz\leftrightarrow dx\,dy$）

Def. Green 公式　$\iint_D\underbrace{(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})}_{\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\ P&Q\end{vmatrix}}dx\,dy=\oint_L P\,dx+Q\,dy$　$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy=\int_L Q(x,y)\,dy$，$\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=-\int_L P(x,y)\,dx$

$|\vec{\nabla}\times\vec{A}|$　significance: Curl

Thm. 4个等价　$du(x,y)=P\,dx+Q\,dy$

Def. Gauss 公式　$\iiint_\Omega\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dx\,dy\,dz=\oiint_\Sigma\vec{F}\cdot d\vec{S}$

Def. Strokes 公式　$\iint_\Sigma(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{S}=\underbrace{\oint_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{s}}$　$P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

$$\begin{vmatrix}dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

含参

f_x连续 ⟶ ; f连续 ⟶

Thm. $\frac{d}{dx}\int f(x,y)\,dy = \int f_x(x,y)\,dy$; $\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta\int_a^b f(x,y)\,dy\,dx$

(1) $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ $\quad \int_a^b x^y\,dy = f(x,y)$ $\quad \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1\left[\int_a^b x^y dy\right]dx = \int_a^b\left[\int_0^1 x^y dx\right]dy$

(2) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$: $\varphi(t) = \int_0^1 \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}dx$ $\quad [0,1]\times[0,1]$ $\quad \varphi'(t) = \int_0^1\left[\underbrace{\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}}_{\text{at "t"}}\right]'dx$ $\quad$ 所求 $= \varphi(1)-\varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt$

purpose：移除 $\ln(1+x)$ ⟶ 有理分式

Thm. $\varphi(x) = H(x,\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy$. $\alpha=\alpha(x)$. $\beta=\beta(x)$

$\varphi'(x) = H_x + H_\alpha\cdot\alpha' + H_\beta\cdot\beta' = \int_\alpha^\beta f_x(x,y)\,dy + f(x,\beta)\cdot\beta' - f(x,\alpha)\cdot\alpha'$

Thm. $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 一致收敛：$\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx \to 0$ when $A\to+\infty$

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ $\quad [\delta,+\infty)$. $(0,+\infty)$ 收敛性质

$\hookrightarrow \frac{1}{x}\cdot e^{-xA}$

取 $x=\frac{1}{k}$, $A=k$ $\quad \frac{k}{e} > \frac{1}{e}$

Thm. Cauchy $\quad \left|\int_A^{A'} f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon$ iff 一致收敛

Thm. Weierstrass $\quad |f(x,y)| < |F(x)|$. $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$ 一致 → 原一致

Thm. A-D (1) $f(x,y)$ 一致，$g(x,y)$ 关 x 单调且一致有界

(2) $\int f(x,y)\,dx$ 一致有界，$g(x,y)$ 关 x 单调 且 $x\to+\infty$ 在 $y\in[c,d]$ 一致 $\to 0$.

e.g. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy^2}{x^p}dx$ $\quad p\in(0,1)$. $y\geq y_0>0$ 一致收敛性 $\left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty}\right)$

$\int_0^1$ 可放缩至 $\frac{1}{x^p}$

Thm. 一致收敛 ⟶ $I(x)$ 连续

f 连续 + $\int^{+\infty} f$ 一致 $\quad\longrightarrow\quad \lim\int = \int\lim$

$\forall \{a_n\}$ 单增且 $\to+\infty$ $\quad u_n(y) = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)\,dx$. Then $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y)$. 一致收敛方向：⇒ . not "iff"

Thm. $f(x,y)\in C[a,+\infty)\times[c,d]$. $\int f(x,y)\,dx$ 一致收敛 . Then $\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx\int_c^d f(x,y)\,dy$ (using $\sum u_n(y)$)

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \int_0^{+\infty}\int_a^b e^{-xy}\,dy\,dx$ + 一致收敛

Thm $\quad f(x,y)$、$f_y(x,y)$ 连续 . $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于每个 y 收敛 . $\int_a^{+\infty} f_y(x,y)\,dx$ 一致 $\quad$ 使用条件

Then $\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx$ (using Thm. above)

Significant

Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

prof: $I(\alpha) = \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx}_{\text{一致收敛}}$. $f(x,\alpha) = e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}$, $f_\alpha(x,\alpha) = -e^{-\alpha x}\sin x$ $\quad$ Constant on $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$

Lemma: $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x$ 于 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛 (obvious)

$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx = -\frac{1}{1+\alpha^2}$ (分部积分)

故 $I(\alpha) = -\arctan\alpha + C$ & $\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$

所求 $= I(0) = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{sgn}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}dt$

Beta 函数

$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. $\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$. $p>0 \wedge q>0$ 时收敛 从而定义域 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$

properties:

1、连续 $\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 一致收敛 (关于 p,q) (by $x^{p-1}(1-x)^{q-1} < x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$)

2. $B(p,q) = B(q,p)$

3. $B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$. $p>0$. $q>1$

$B(p,q) = \int_0^1 \frac{1}{p}(1-x)^{q-1}dx^p = \frac{q-1}{p}\int_0^1 \underbrace{x^p}_{(1+x-1)\cdot x^{p-1}}(1-x)^{q-2}dx = \frac{q-1}{p}\left[\underbrace{\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx}_{B(p,q-1)} - \underbrace{\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{B(p,q)}\right]$

4. let $x=\cos^2\varphi$. $B(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi\,\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi$, then $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$

Gamma 函数

$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ $\quad$ 注意瑕积分 $\quad$ Domain $(0,+\infty)$

properties:

1. 连续 ∧ 可导 (using U.C.)

2. $\Gamma(s+1) = s\cdot\Gamma(s)$ (using 分部积分) $\quad$ redefine $(-\infty,+\infty)$ $\quad \Gamma(n+1) = n!\cdot\Gamma(1) = n!$

3. let $x=t^2$, $\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} t^{2s-1}\cdot e^{-t^2}dt$ $\quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ $\quad$ 二重积分 + 极坐标 $\quad$ significant $\quad$ Amazing

e.g. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 x\,dx = \,?\,B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$